

# Vectơ và tọa độ không gian

Toán · Lớp 12

Giáo viên: Phúc Hảo

- ▶ Hiểu khái niệm **vectơ pháp tuyến** và cách lập **phương trình tổng quát** của mặt phẳng.
- ▶ Viết được phương trình mặt phẳng khi biết một điểm và vectơ pháp tuyến.
- ▶ Nhận biết vị trí đặc biệt của mặt phẳng và **phương trình theo đoạn chắn**.
- ▶ Vận dụng vào bài toán khoảng cách và mô hình thực tế trong không gian  $Oxyz$ .

**Ý chính:** Trong không gian, làm sao mô tả chính xác một *mặt phẳng* bằng phương trình?

Hãy tưởng tượng một chiếc **drone** bay quét địa hình. Nó cần xác định *bề mặt sàn, tường nhà, mái dốc...* Mỗi bề mặt phẳng ấy được máy tính lưu bằng **một phương trình**.

Ở lớp 10, ta viết phương trình đường thẳng trong mặt phẳng dạng  $ax + by + c = 0$ . Câu hỏi tự nhiên:

**Câu hỏi gợi mở**

Trong không gian  $Oxyz$ , một mặt phẳng sẽ có phương trình dạng nào? Cần bao nhiêu thông tin để xác định duy nhất một mặt phẳng?

# 1

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

---

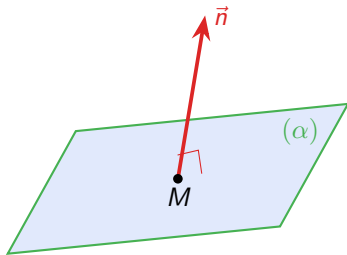
## Định nghĩa

Vectơ  $\vec{n} \neq \vec{0}$  được gọi là **vectơ pháp tuyến** (VTPT) của mặt phẳng  $(\alpha)$  nếu giá của  $\vec{n}$  **vuông góc** với  $(\alpha)$ .

**Liên hệ:** VTPT giống như một *cây cột dựng thẳng đứng* cắm trên mặt sàn — nó chỉ ra "hướng dựng đứng" của mặt phẳng.

## Ghi nhớ

Nếu  $\vec{n}$  là VTPT thì  $k\vec{n}$  ( $k \neq 0$ ) cũng là VTPT. Một mặt phẳng có **vô số** VTPT nhưng chỉ **một phương** duy nhất.



**Ý chính:** Từ hai vectơ song song (nằm trên) mặt phẳng, ta tìm được VTPT nhờ **tích có hướng**.

Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  là hai vectơ **không cùng phương** và có giá song song hoặc nằm trong  $(\alpha)$  (gọi là **cặp vectơ chỉ phương**), thì một VTPT của  $(\alpha)$  là:

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$$

## Mẹo nhớ

Tích có hướng  $[\vec{a}, \vec{b}]$  luôn **vuông góc** với cả  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Cách nhớ: viết hai dòng tọa độ, che lần lượt cột 1, 2, 3 và tính định thức  $2 \times 2$  (nhớ đổi dấu ở thành phần giữa).

# 2

Phương trình tổng quát của mặt phẳng

---

## Định nghĩa

Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có VTPT  $\vec{n} = (A; B; C)$  có phương trình:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Khai triển ta được **phương trình tổng quát**:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 > 0).$$

## Ghi nhớ

Hệ số của  $x, y, z$  trong phương trình **chính là tọa độ VTPT**:  $\vec{n} = (A; B; C)$ . Đây là mẹo "đọc VTPT ngay từ phương trình".

## Vì sao có phương trình đó?

**Ý chính:** Một điểm  $M$  thuộc  $(\alpha)$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ .

Lấy  $M(x; y; z)$  tùy ý. Khi đó:

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0).$$

Điểm  $M \in (\alpha) \iff \overrightarrow{M_0M}$  vuông góc với VTPT  $\vec{n}$ , tức là tích vô hướng bằng 0:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \iff A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

### Liên hệ thực tế

Giống như kiểm tra một tấm ván có nằm đúng trên sàn không: chỉ cần véc-tơ dọc theo tấm ván *vuông góc* với cây cột dựng đứng (VTPT).

- ▶  $D = 0$ : mặt phẳng **đi qua gốc tọa độ**  $O$ .
- ▶ Thiếu  $x$  ( $A = 0$ ): mặt phẳng **song song hoặc chứa trục**  $Ox$ .
- ▶ Chỉ còn  $z$  ( $A = B = 0$ ): mặt phẳng **song song mặt phẳng** ( $Oxy$ ), dạng  $z = k$ .

| Phương trình           | VTPT        | Đặc điểm            |
|------------------------|-------------|---------------------|
| $Ax + By + Cz + D = 0$ | $(A; B; C)$ | tổng quát           |
| $z = 0$                | $(0; 0; 1)$ | mặt phẳng ( $Oxy$ ) |
| $y = 0$                | $(0; 1; 0)$ | mặt phẳng ( $Oxz$ ) |
| $x = 0$                | $(1; 0; 0)$ | mặt phẳng ( $Oyz$ ) |

### Lưu ý — lỗi thường gặp

Đừng nhầm: phương trình  $z = 2$  **không phải** một đường thẳng mà là **cả một mặt phẳng** nằm ngang, song song ( $Oxy$ ).

# 3

Phương trình theo đoạn chắn

---

# Phương trình theo đoạn chắn

## Định nghĩa

Mặt phẳng cắt ba trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  lần lượt tại  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; b; 0)$ ,  $C(0; 0; c)$  với  $abc \neq 0$  có phương trình **theo đoạn chắn**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

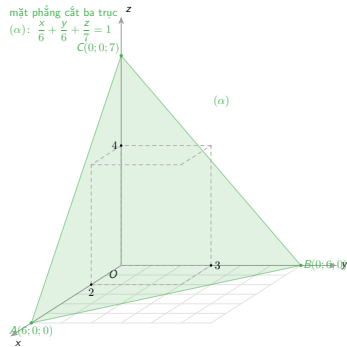
## Liên hệ thực tế

Ba số  $a, b, c$  chính là "khoảng cách chặn" trên ba trục — giống như dựng một mặt dốc chạm ba tường tại ba vị trí đã biết.

## Ghi nhớ

Chỉ dùng dạng đoạn chắn khi mặt phẳng **không đi qua gốc** và **cắt cả ba trục** ( $a, b, c$  đều khác 0).

# Minh hoạ mặt phẳng cắt ba trục



# 4

Vị trí tương đối & khoảng cách

---

# Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

**Ý chính:** Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng đo theo *đường vuông góc* (theo phương VTPT).

Cho mặt phẳng  $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$  và điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ . Khoảng cách:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

## Ghi nhớ

Tử số: thay tọa độ  $M_0$  vào vế trái phương trình rồi lấy **giá trị tuyệt đối**. Mẫu số: **độ dài VTPT**. Đừng quên dấu trị tuyệt đối!

## Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho  $(\alpha) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  và  $(\beta) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  với VTPT  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ .

| Điều kiện                                              | Vị trí     |
|--------------------------------------------------------|------------|
| $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ không cùng phương               | cắt nhau   |
| $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ , hệ số $D$ khác tỉ lệ | song song  |
| mọi hệ số tỉ lệ (kể cả $D$ )                           | trùng nhau |
| $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$                        | vuông góc  |

### Liên hệ thực tế

Hai bức tường **song song** có cùng "hướng dựng đứng" (VTPT cùng phương); hai bức tường **vuông góc** có VTPT vuông góc nhau.

# 5

Ví dụ áp dụng

---

## Ví dụ 1 — Viết phương trình mặt phẳng

**Đề:** Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $M_0(1; -2; 3)$  và có VTPT  $\vec{n} = (2; -1; 4)$ .

**Bước 1.** Áp dụng phương trình mặt phẳng qua  $M_0$  với VTPT  $\vec{n} = (A; B; C)$ :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

*Vì sao:* mọi điểm trên  $(\alpha)$  đều tạo với  $M_0$  một vectơ vuông góc  $\vec{n}$ .

**Bước 2.** Thay số  $A = 2$ ,  $B = -1$ ,  $C = 4$  và  $(x_0; y_0; z_0) = (1; -2; 3)$ :

$$2(x - 1) - 1(y + 2) + 4(z - 3) = 0.$$

**Bước 3.** Khai triển và rút gọn:

$$2x - 2 - y - 2 + 4z - 12 = 0 \iff 2x - y + 4z - 16 = 0.$$

**Kết luận:**  $(\alpha) : 2x - y + 4z - 16 = 0$ .

## Ví dụ 2 — Mặt phẳng qua ba điểm

**Đề:** Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 3)$ .

**Bước 1.** Nhận xét ba điểm nằm trên ba trục toạ độ, các đoạn chắn  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$  đều khác 0. Vì sao: dạng **đoạn chắn** áp dụng được ngay, gọn hơn tính tích có hướng.

**Bước 2.** Viết phương trình theo đoạn chắn:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$

**Bước 3.** Quy đồng mẫu số chung 6 để đưa về dạng tổng quát:

$$6x + 3y + 2z = 6 \iff 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

**Kết luận:** Mặt phẳng  $(ABC)$  :  $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ , có VTPT  $\vec{n} = (6; 3; 2)$ .

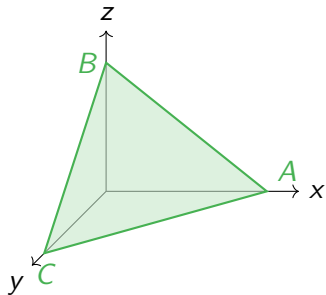
### Luyện tập nhanh · Nhận biết

Mặt phẳng  $(P) : 2x - 3y + z - 5 = 0$  có một vectơ pháp tuyến là:

- A.  $\vec{n} = (2; -3; 1)$
- B.  $\vec{n} = (2; 3; 1)$
- C.  $\vec{n} = (-2; -3; 1)$
- D.  $\vec{n} = (2; -3; -5)$

Đáp án đúng: **A.**  $\vec{n} = (2; -3; 1)$

VTPT lấy đúng hệ số của  $x, y, z$ . Phương án B sai dấu hệ số  $y$  (quên dấu trừ), C sai dấu hệ số  $x$ , còn D nhầm lấy cả hằng số tự do  $-5$  làm thành phần thứ ba.



### Luyện tập nhanh · Nhận biết

Mặt phẳng cắt các trục tại  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 0; 3)$ ,  $C(0; 1; 0)$ . Phương trình theo đoạn chắn là:

A.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$

B.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$

C.  $2x + y + 3z = 1$

D.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 0$

Đáp án đúng: **A.**  $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$

Mẫu số là giao điểm trên mỗi trục:  $x \rightarrow 2, y \rightarrow 1, z \rightarrow 3$ . B nhầm giao điểm trục  $Oy$  và  $Oz$  cho nhau. C dùng chính hoành độ giao điểm làm hệ số (sai công thức). D để về phải  $= 0$  thay vì  $= 1$ .

### Luyện tập nhanh · Nhận biết

Mặt phẳng đi qua điểm  $M(1; -2; 3)$  và có VTPT  $\vec{n} = (1; 2; -1)$  có phương trình:

- A.  $x + 2y - z + 6 = 0$
- B.  $x + 2y - z - 6 = 0$
- C.  $x - 2y + 3z + 6 = 0$
- D.  $x + 2y - z = 0$

Đáp án đúng: **A.**  $x + 2y - z + 6 = 0$

Thay  $M$ :  $1(x - 1) + 2(y + 2) - 1(z - 3) = 0 \Rightarrow x + 2y - z + 6 = 0$ . B sai dấu hằng số (tính nhầm  $-1 + 4 + 3$ ). C lấy nhầm tọa độ  $M$  làm hệ số. D quên thế điểm  $M$  vào (bỏ hằng số).

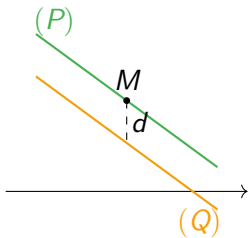
### Luyện tập nhanh · Thông hiểu

Khoảng cách từ điểm  $O(0; 0; 0)$  đến mặt phẳng  $(P) : 2x - y + 2z - 6 = 0$  bằng:

- A. 2
- B. 6
- C.  $\frac{6}{9}$
- D.  $\frac{6}{\sqrt{5}}$

Đáp án đúng: **A. 2**

$d = \frac{|-6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{6}{3} = 2$ . B quên chia cho độ dài VTPT. C nhầm mẫu là  $4+1+4=9$  mà không lấy căn. D tính căn thiếu số hạng  $(\sqrt{4+1})$ .



### Luyện tập nhanh · Thông hiểu

Hai mặt phẳng  $(P) : x - 2y + z + 1 = 0$  và  $(Q) : 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ . Vị trí tương đối của chúng là:

- A. Song song
- B. Cắt nhau
- C. Trùng nhau
- D. Vuông góc

Đáp án đúng: **A. Song song**

Các hệ số VTPT tỉ lệ  $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$  nhưng  $\frac{1}{-3} \neq \frac{1}{2}$  nên song song, không trùng (C là bấy khi quên kiểm tra hằng số). B sai vì hai VTPT cùng phương. D sai vì tích vô hướng hai VTPT  $\neq 0$ .

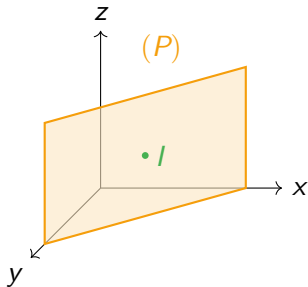
### Luyện tập nhanh · Thông hiểu

Mặt phẳng đi qua ba điểm  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 3)$  có VTPT cùng phương với:

- A.  $(6; 3; 2)$
- B.  $(1; 2; 3)$
- C.  $(6; -3; 2)$
- D.  $(1; 1; 1)$

Đáp án đúng: **A.** (6; 3; 2)

Phương trình đoạn chắn  $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z = 6$ , VTPT (6; 3; 2). B lấy nhầm chính các giao điểm làm VTPT. C sai dấu do tính  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  nhầm. D nhầm tất cả bằng nhau.



### Luyện tập nhanh · Vận dụng

Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $I(1; 1; 1)$  và song song với  $(Q) : x + y + z - 6 = 0$ . Phương trình  $(P)$  là:

- A.  $x + y + z - 3 = 0$
- B.  $x + y + z - 6 = 0$
- C.  $x + y + z + 3 = 0$
- D.  $x + y + z = 0$

Đáp án đúng: **A.**  $x + y + z - 3 = 0$

Song song nên giữ VTPT  $(1; 1; 1)$ ; thế  $l$ :  $1 + 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -3$ . B chép nguyên  $(Q)$  mà quên thế  $l$  (bấy khi tưởng song song thì cùng phương trình). C sai dấu  $D$ . D quên hằng số tự do.

### Luyện tập nhanh · Vận dụng

Cho  $(P) : x - 2y + 2z + 1 = 0$  và  $(Q) : x - 2y + 2z - 8 = 0$ . Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song này bằng:

- A. 3
- B. 9
- C. 7
- D.  $\frac{9}{\sqrt{5}}$

Đáp án đúng: **A.** 3

$d = \frac{|1 - (-8)|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{9}{3} = 3$ . B quên chia cho  $\sqrt{9} = 3$ . C nhầm hiệu hằng số là  $1 - 8 = -7$  (sai dấu). D tính căn thiếu số hạng  $(\sqrt{1 + 4})$ .

**Bài 1.** Viết phương trình mặt phẳng đi qua  $M(2; -1; 3)$  và có VTPT  $\vec{n} = (1; -2; 2)$ .

**Bài 2.** Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; -2; 0)$ ,  $C(0; 0; 4)$ .

**Bài 3.** Tính khoảng cách từ điểm  $N(1; 2; -1)$  đến mặt phẳng  $(P) : 2x - y + 2z + 3 = 0$ .

### Gợi ý

Bài 1: dùng ngay  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ . Bài 2: dùng phương trình đoạn chắn rồi khử mẫu. Bài 3: áp dụng  $d = \frac{|Ax_N + By_N + Cz_N + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ , chú ý dấu và lấy căn đầy đủ.

1. Viết phương trình mặt phẳng qua  $M(0; 1; -2)$  có cặp VTCP  $\vec{u} = (1; 0; 1)$ ,  $\vec{v} = (2; 1; 0)$ .
2. Viết phương trình mặt phẳng qua  $A(1; 1; 1)$  và song song với  $(Q) : 3x - y + 2z - 5 = 0$ .
3. Xét vị trí tương đối của  $(P) : x + y - z + 2 = 0$  và  $(Q) : 2x + 2y - 2z + 4 = 0$ .
4. Tìm  $m$  để  $(P) : x + my + 2z - 1 = 0$  vuông góc với  $(Q) : 2x - y + z = 0$ .
5. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng  $(P) : x - y + 2z + 1 = 0$  và  $(Q) : x - y + 2z - 5 = 0$ .
6. Viết phương trình mặt phẳng chứa trục  $Ox$  và đi qua điểm  $E(1; 2; 3)$ .

**Đọc trước:** bài "Phương trình đường thẳng trong không gian" – tìm hiểu VTCP và dạng tham số.

## Bảng tóm tắt (1): Lập phương trình mặt phẳng

| Dữ kiện                                                     | Cách lập                                                    |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Qua $M_0$ , VTPT $\vec{n}$                                  | $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$<br>( $A; B; C$ ) |
| Qua $M_0$ , cặp VTCP $\vec{u}, \vec{v}$                     | $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$ rồi làm như trên             |
| Qua 3 điểm $A, B, C$                                        | $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}]$                            |
| Cắt trục tại<br>( $a; 0; 0$ ), ( $0; b; 0$ ), ( $0; 0; c$ ) | $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$               |

## Bảng tóm tắt (2): Vị trí tương đối & khoảng cách

| Nội dung            | Điều kiện / Công thức                                          |
|---------------------|----------------------------------------------------------------|
| $(P) \parallel (Q)$ | $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ |
| $(P) \equiv (Q)$    | $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$    |
| $(P) \perp (Q)$     | $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$                                |
| $d(M, (P))$         | $\frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$      |

- ▶ Mọi mặt phẳng trong  $Oxyz$  có dạng  $Ax + By + Cz + D = 0$  với VTPT  $\vec{n} = (A; B; C)$ .
- ▶ Muốn lập phương trình: cần một điểm và một VTPT (hoặc suy ra VTPT từ cặp VTCP, ba điểm).
- ▶ Xét vị trí tương đối dựa vào tỉ lệ các hệ số; nhớ kiểm tra hằng số  $D$  để phân biệt song song và trùng.
- ▶ Khoảng cách luôn lấy trị tuyệt đối ở tử và căn đầy đủ ở mẫu – lỗi thường gặp là quên chia hoặc sai dấu.

**Liên hệ:** Phương trình mặt phẳng chính là nền tảng để viết phương trình đường thẳng và mặt cầu, đồng thời ứng dụng trong đồ họa 3D và định vị không gian.

**Cảm ơn các em đã lắng nghe!**

---

Bài giảng biên soạn với EduFlow · [agentra.io.vn](https://agentra.io.vn)

---