

Góc lượng giác, số đo độ và radian

Toán · Lớp 11

Giáo viên: Phúc Hảo

- ▶ Nhận biết được **góc lượng giác**, tia đầu – tia cuối và chiều quay.
- ▶ Hiểu và sử dụng thành thạo **hai đơn vị đo góc**: độ và radian.
- ▶ **Đổi qua lại** giữa số đo độ và số đo radian.
- ▶ **Biểu diễn** một góc lượng giác trên đường tròn lượng giác.

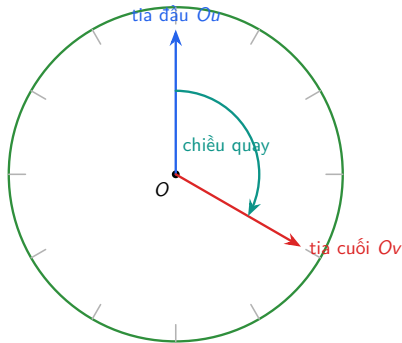
Ý chính: Từ tiết này, "góc" không còn bị giới hạn trong khoảng 0° đến 180° nữa mà có thể *quay bao nhiêu vòng tùy ý, theo cả hai chiều*.

Chiếc **đu quay khổng lồ** quay đều. Một cabin xuất phát ở vị trí thấp nhất, sau đó quay **1 vòng rưỡi** rồi dừng.

Nếu chỉ nói cabin "quay một góc", ta **không diễn tả được** là nó đã quay bao nhiêu và theo chiều nào.

Câu hỏi gợi mở

Làm sao để ghi lại chính xác việc "quay 1 vòng rưỡi theo chiều kim đồng hồ" bằng **một con số**?



1

Góc lượng giác và số đo của nó

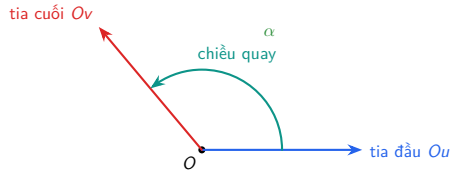
Góc lượng giác là gì?

Định nghĩa

Cho hai tia Ou , Ov . Nếu tia Om **quay quanh** O từ tia Ou đến tia Ov thì ta được một **góc lượng giác**, kí hiệu (Ou, Ov) .

- ▶ Ou : **tia đầu** (tia gốc).
- ▶ Ov : **tia cuối**.

Liên hệ: tia Om giống *kim đồng hồ* quay từ mốc này sang mốc kia – có thể quay nhiều vòng, theo hai chiều khác nhau.



Chiều dương và chiều âm

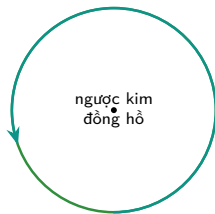
Cùng một cặp tia (Ou , Ov) nhưng **quay theo hai chiều** sẽ cho hai góc khác nhau.

Ta quy ước:

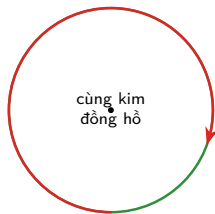
- ▶ Quay **ngược** chiều kim đồng hồ: **chiều dương** (+).
- ▶ Quay **cùng** chiều kim đồng hồ: **chiều âm** (-).

Ghi nhớ

Lỗi thường gặp: quên dấu của chiều quay. Quay theo chiều âm thì số đo mang **dấu trừ**.



chiều (+)



chiều (-)

Định nghĩa

Số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) cho biết tia Om đã quay được **bao nhiêu** và **theo chiều nào**. Nếu một góc lượng giác có số đo α thì **mọi** góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với nó có số đo là

$$\alpha + k \cdot 360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{hoặc} \quad \alpha + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ý chính: Thêm hay bớt *một số nguyên lần vòng* (360° hay 2π) thì tia cuối **không đổi vị trí** – nên vô số góc cùng nằm ở một chỗ trên đường tròn.

2

Đơn vị đo góc: độ và radian

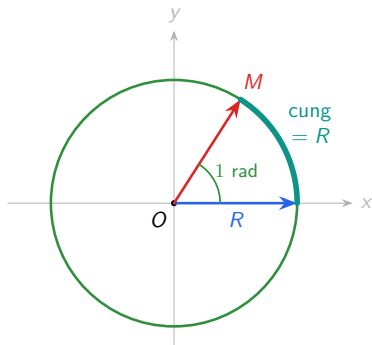
Radian – đơn vị "tự nhiên" của góc

Bên cạnh đơn vị **độ** ($^{\circ}$) đã quen, ta dùng thêm đơn vị **radian** (rad).

Định nghĩa

Trên đường tròn bán kính R , góc ở tâm chắn một **cung có độ dài đúng bằng R** thì có số đo **1 radian**.

Liên hệ: nếu cuộn đúng một đoạn dây dài bằng bán kính lên vành bánh xe, thì góc ở tâm "nhìn" đoạn dây đó chính là $1 \text{ rad} \approx 57^{\circ}18'$.



Đổi giữa độ và radian

Vì cả đường tròn ứng với 360° và cũng ứng với 2π rad, ta có $180^\circ = \pi$ rad. Từ đó suy ra công thức đổi:

Ghi nhớ – công thức cốt lõi

$$\alpha \text{ (rad)} = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \qquad \alpha^\circ = \alpha \text{ (rad)} \cdot \frac{180}{\pi}$$

Mẹo nhớ: muốn ra rad thì nhân $\frac{\pi}{180}$; muốn ra độ thì nhân $\frac{180}{\pi}$ – *cái cần tìm nằm ở tử số.*

Ý chính: Khi viết số đo bằng radian, người ta **thường bỏ chữ "rad"**: viết $\frac{\pi}{3}$ thay cho $\frac{\pi}{3}$ rad, còn số đo bằng độ luôn có kí hiệu $^\circ$.

Bảng số đo các góc đặc biệt

Độ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Ghi nhớ

Nên **thuộc lòng** bảng này: đây là các góc xuất hiện dày đặc trong mọi bài lượng giác. Chú ý $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3}$ tương ứng $30^\circ < 45^\circ < 60^\circ$.

3

Đường tròn lượng giác và biểu diễn góc

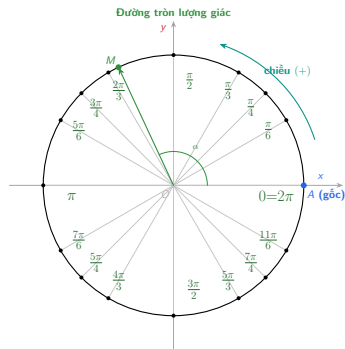
Định nghĩa

Đường tròn lượng giác là đường tròn có **tâm O** , **bán kính bằng 1**, trên đó:

- ▶ Chọn điểm $A(1; 0)$ làm **gốc**.
- ▶ Chọn **chiều dương** là chiều ngược kim đồng hồ.

Ý chính: Mỗi góc lượng giác α ứng với *đúng một điểm* M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha$; điểm M gọi là **điểm biểu diễn** của góc α .

Đường tròn lượng giác – toàn cảnh



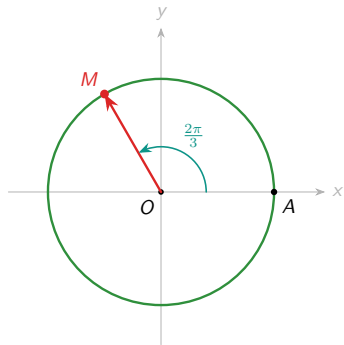
Biểu diễn một góc trên đường tròn

Để biểu diễn góc α , ta đặt điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha$:

- ▶ Xuất phát từ gốc A .
- ▶ Quay theo **chiều dương** nếu $\alpha > 0$, theo **chiều âm** nếu $\alpha < 0$.

Ví dụ minh họa

Góc $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ($= 120^\circ$) có điểm biểu diễn M nằm ở **góc phần tư thứ II**.



4

Ví dụ vận dụng

Ví dụ 1 – Đổi giữa độ và radian

Đề: a) Đổi 72° sang radian. b) Đổi $\frac{3\pi}{5}$ rad sang độ.

Bước 1 (chọn công thức). Đổi độ $\rightarrow$ radian thì nhân $\frac{\pi}{180}$; đổi radian $\rightarrow$ độ thì nhân $\frac{180}{\pi}$.

Bước 2 (câu a). Vì đổi ra radian nên nhân với $\frac{\pi}{180}$:

$$72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{72\pi}{180} = \frac{2\pi}{5} \text{ (rad)}.$$

Bước 3 (câu b). Vì đổi ra độ nên nhân với $\frac{180}{\pi}$; chữ π rút gọn:

$$\frac{3\pi}{5} = \frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{3 \cdot 180}{5} = 108^\circ.$$

Ý chính: $72^\circ = \frac{2\pi}{5}$ và $\frac{3\pi}{5} = 108^\circ$. Luôn kiểm tra: góc nhọn $< 90^\circ$ phải cho kết quả radian $< \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2 – Biểu diễn góc trên đường tròn

Đề: Biểu diễn góc lượng giác có số đo -405° .

Bước 1. Tách phần bội của 360° ra, vì thêm bớt bội 360° không đổi điểm biểu diễn:

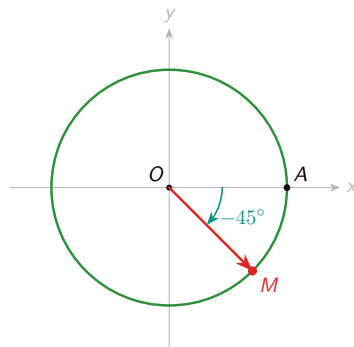
$$-405^\circ = -45^\circ + (-1) \cdot 360^\circ.$$

Bước 2. Vậy điểm biểu diễn của -405° **trùng** với điểm biểu diễn của -45° .

Bước 3. Từ gốc A , quay theo **chiều âm** một góc 45° , được điểm M ở **góc phần tư IV**.

Ghi nhớ

Luôn đưa góc về khoảng $[0^\circ; 360^\circ)$ (hoặc $(-180^\circ; 180^\circ]$) để dễ xác định vị trí.



Luyện tập nhanh · Nhận biết

Đổi số đo góc 60° sang radian. Kết quả là:

- A. $\frac{\pi}{3}$
- B. $\frac{\pi}{6}$
- C. $\frac{\pi}{2}$
- D. 3π

Đáp án đúng: **A.** $\frac{\pi}{3}$.

Áp dụng $\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\text{độ}} \cdot \frac{\pi}{180}$: $60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$.

Bẫy: B là số đo của 30° (nhớ nhầm góc); C là số đo của 90° ; D do *quên chia* cho 180 (chỉ nhân với π).

Luyện tập nhanh · Nhận biết

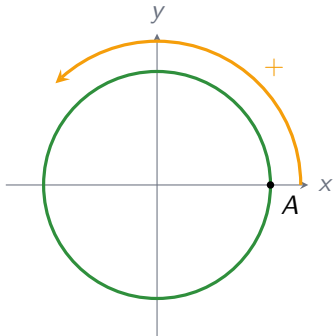
Đổi số đo góc $\frac{\pi}{4}$ radian sang độ. Kết quả là:

- A. 45°
- B. 30°
- C. 60°
- D. 90°

Đáp án đúng: **A.** 45° .

Áp dụng $\alpha_{\text{độ}} = \alpha_{\text{rad}} \cdot \frac{180}{\pi}$: $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45^\circ$.

Bẫy: B ($30^\circ = \frac{\pi}{6}$) và C ($60^\circ = \frac{\pi}{3}$) do đọc nhầm mẫu số; D ($90^\circ = \frac{\pi}{2}$) do nhầm $\frac{\pi}{4}$ với $\frac{\pi}{2}$.



Luyện tập nhanh · Nhận biết

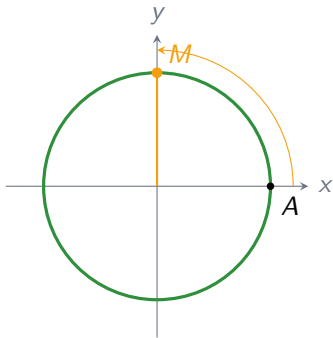
Trên đường tròn lượng giác, chiều dương (mũi tên trên hình) là chiều:

- A. ngược chiều kim đồng hồ
- B. cùng chiều kim đồng hồ
- C. từ trên xuống dưới
- D. tùy người vẽ chọn

Đáp án đúng: **A. ngược chiều kim đồng hồ.**

Quy ước: chiều dương của đường tròn lượng giác luôn là chiều *ngược* chiều kim đồng hồ (đi từ A lên phía trên).

Bẫy: B là chiều *âm* — học sinh hay lẫn vì kim đồng hồ quen thuộc; D sai vì đây là quy ước bắt buộc, không tùy chọn.



Luyện tập nhanh · Thông hiểu

Điểm M là đỉnh trên của đường tròn. Góc lượng giác (OA, OM) có số đo dương nhỏ nhất là:

- A. $\frac{\pi}{2}$
- B. π
- C. $\frac{3\pi}{2}$
- D. $\frac{2\pi}{3}$

Đáp án đúng: **A.** $\frac{\pi}{2}$.

Quay từ A theo chiều dương 90° tới đỉnh trên M , tức $\frac{\pi}{2}$.

Bãy: $B (\pi)$ là điểm bên trái; $C (\frac{3\pi}{2})$ là đỉnh dưới — sai do đi theo chiều âm; $D (\frac{2\pi}{3} = 120^\circ)$ do ước lượng hình không chính xác.

Luyện tập nhanh · Thông hiểu

Đổi số đo góc 135° sang radian. Kết quả là:

A. $\frac{3\pi}{4}$

B. $\frac{2\pi}{3}$

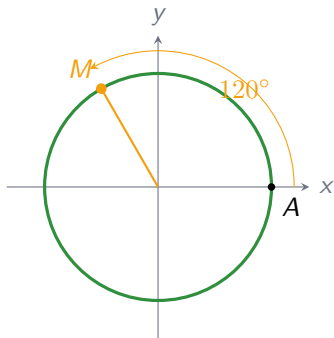
C. $\frac{5\pi}{6}$

D. $\frac{4\pi}{3}$

Đáp án đúng: **A.** $\frac{3\pi}{4}$.

$$135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ (rút gọn chia cho 45).}$$

Bẫy: B ($\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$) và C ($\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$) do rút gọn nhầm; D ($\frac{4\pi}{3} = 240^\circ$) do nhân sai tử số.



Luyện tập nhanh · Thông hiểu

Góc lượng giác (OA, OM) có một số đo là 120° . Số đo tổng quát của họ góc này là:

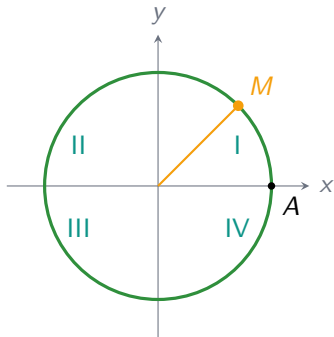
- A. $120^\circ + k360^\circ$
- B. $120^\circ + k180^\circ$
- C. $120^\circ \cdot k$
- D. $120^\circ + 360^\circ$

$(k \in \mathbb{Z})$

Đáp án đúng: **A.** $120^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Mỗi vòng quay đủ là 360° , nên mọi góc cùng điểm biểu diễn hơn kém nhau bội của 360° .

Bẫy: B dùng chu kỳ 180° (nhầm với tính chất của $\tan$); C sai bản chất; D chỉ là *một* số đo cụ thể, thiếu tham số k .



Luyện tập nhanh · Vận dụng

Điểm biểu diễn góc lượng giác 405° nằm ở góc phần tư thứ mấy?

- A. Thứ nhất (I)
- B. Thứ hai (II)
- C. Thứ ba (III)
- D. Thứ tư (IV)

Đáp án đúng: **A. Thứ nhất (I).**

$405^\circ = 360^\circ + 45^\circ$, nên M trùng điểm biểu diễn của 45° — nằm ở góc phần tư thứ nhất.

Bẫy: B, C, D do *quên trừ* một vòng 360° rồi ước lượng vị trí của 405° sai lệch sang các phần tư khác.

Luyện tập nhanh · Vận dụng

Kim giờ của một đồng hồ quay từ vị trí số 12 đến vị trí số 3. Số đo góc lượng giác mà kim giờ quét được là:

A. $-\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $-\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{4}$

Đáp án đúng: **A.** $-\frac{\pi}{2}$.

Kim quay *cùng chiều kim đồng hồ* (chiều âm) một phần tư vòng: $-\frac{1}{4} \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2}$.

Bẫy: B ($+\frac{\pi}{2}$) do *quên dấu âm* của chiều quay; C, D do nhầm một phần tư vòng thành $\frac{\pi}{4}$ thay vì $\frac{\pi}{2}$.

1. Đổi các góc sau sang radian: 72° , -150° .
2. Đổi các góc sau sang độ: $\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{3\pi}{4}$.
3. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc: 750° và -60° .

Gợi ý

Đổi đơn vị: nhân $\frac{\pi}{180}$ (độ $\rightarrow$ rad) hoặc $\frac{180}{\pi}$ (rad $\rightarrow$ độ). Khi biểu diễn, cộng hoặc trừ bội của 360° để đưa số đo về khoảng $[0^\circ; 360^\circ)$ rồi xác định điểm.

1. Đổi sang radian: 15° , 240° , -300° .
2. Đổi sang độ: $\frac{\pi}{5}$, $\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{3}$.
3. Viết số đo tổng quát của họ góc lượng giác biểu diễn cùng điểm với góc 40° .
4. Hai góc 1200° và -240° có cùng điểm biểu diễn không? Giải thích.
5. Kim phút quay từ vị trí 12 giờ đến 12 giờ 20 phút quét góc lượng giác bằng bao nhiêu radian?

Đọc trước

Bài sau: **Giá trị lượng giác của một góc lượng giác** (sin, cos, tan, cot và ý nghĩa trên đường tròn lượng giác).

Bảng tóm tắt: Đổi độ – radian

Độ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Ghi nhớ các góc đặc biệt này giúp đổi đơn vị và biểu diễn nhanh trên đường tròn lượng giác mà không cần tính lại.

Bảng tóm tắt: Công thức trọng tâm

Nội dung	Công thức / Quy ước
Đổi độ → radian	$\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\text{độ}} \cdot \frac{\pi}{180}$
Đổi radian → độ	$\alpha_{\text{độ}} = \alpha_{\text{rad}} \cdot \frac{180}{\pi}$
Số đo tổng quát	$a^\circ + k360^\circ$ hoặc $\alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
Chiều dương	ngược chiều kim đồng hồ

- ▶ **Góc lượng giác** (OA, OM) có tia đầu, tia cuối và chiều quay; số đo có thể âm, dương hoặc lớn hơn 360° .
- ▶ **Hai đơn vị** đo góc: độ và radian, đổi qua lại bằng $\frac{\pi}{180}$ và $\frac{180}{\pi}$.
- ▶ **Đường tròn lượng giác** có chiều dương ngược kim đồng hồ; mỗi góc ứng với một điểm biểu diễn M .
- ▶ **Số đo tổng quát** $a^\circ + k360^\circ$ (hay $\alpha + k2\pi$) mô tả mọi góc cùng điểm biểu diễn.

Liên hệ: Đây là nền tảng để bài sau xây dựng các *giá trị lượng giác* sin, cos, tan, cot — công cụ mô tả mọi chuyển động tuần hoàn quanh ta.

Cảm ơn các em đã lắng nghe!

Bài giảng biên soạn với EduFlow · agentra.io.vn
