

Lượng giác

Toán · Lớp 11

Giáo viên: Phúc Hảo

- ▶ Hiểu khái niệm **cung** và **góc lượng giác**, chiều dương và chiều âm.
- ▶ Nắm hai đơn vị đo góc: **độ** và **radian**, biết chuyển đổi qua lại.
- ▶ Biểu diễn cung, góc trên **đường tròn lượng giác** và viết công thức tổng quát $\alpha + k2\pi$.
- ▶ Vận dụng vào bài tập nhận biết vị trí điểm cuối của cung.

Ý chính: Vì sao kim đồng hồ quay mãi mà ta vẫn nói "3 giờ"?

Hãy tưởng tượng một chiếc **đồng hồ** khổng lồ trong công viên. Một cabin xuất phát ở vị trí thấp nhất, quay hết một vòng rồi quay tiếp *nửa vòng* nữa.

- ▶ Cabin đã quay được **bao nhiêu** rồi? Một vòng rưỡi? Hay 540° ?
- ▶ Nếu quay theo chiều ngược lại thì sao?

Liên hệ thực tế

Góc thông thường (hình học) chỉ từ 0° đến 360° . Nhưng chuyển động quay thực tế có thể quay **hiệu nhiều vòng** và theo **hai chiều**. Ta cần một khái niệm mới: **góc lượng giác** — đó là nội dung bài học hôm nay!

1

Khái niệm cung và góc lượng giác

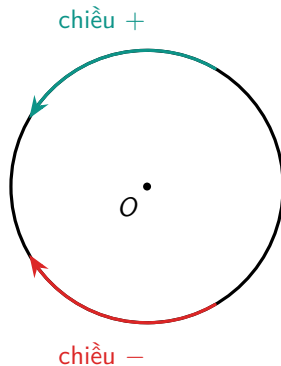
Đường tròn định hướng

Định nghĩa

Đường tròn định hướng là đường tròn trên đó ta chọn một chiều chuyển động làm **chiều dương**, chiều còn lại là **chiều âm**.

Ghi nhớ

Quy ước: chiều **dương** là chiều **ngược** chiều kim đồng hồ.



Định nghĩa

Trên đường tròn định hướng, cho hai điểm A (điểm đầu) và B (điểm cuối). Một điểm M di động từ A theo một chiều nhất định đến B vạch nên một **cung lượng giác** có điểm đầu A , điểm cuối B , kí hiệu $\widehat{AB}$.

Ý chính: Với cùng A và B , có **vô số** cung lượng giác — chúng khác nhau ở số vòng quay và chiều quay.

Liên hệ thực tế

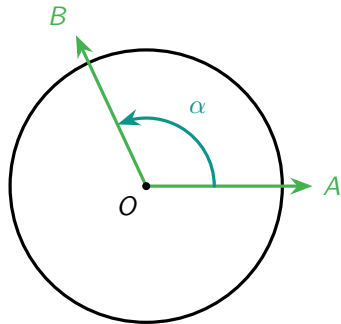
Giống như đi từ nhà đến trường: có thể đi thẳng, có thể đi vòng qua công viên rồi mới tới. Cùng điểm đầu và điểm cuối nhưng "quãng đường quay" khác nhau.

Định nghĩa

Khi tia OM quay quanh gốc O từ vị trí tia đầu OA đến tia cuối OB , nó vạch nên một **góc lượng giác**, kí hiệu (OA, OB) .

Ghi nhớ

Mỗi cung lượng giác $\widehat{AB}$ ứng với đúng một góc lượng giác (OA, OB) và ngược lại.



2

Đơn vị đo góc: độ và radian

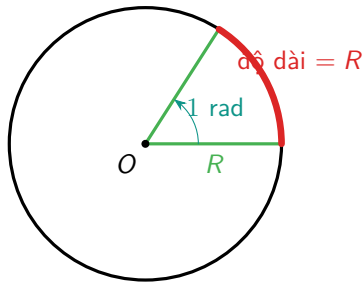
Định nghĩa

Trên đường tròn bán kính R , cung có **độ dài bằng R** được gọi là cung có số đo **1 radian** (kí hiệu 1 rad).

Ghi nhớ

Cả đường tròn dài $2\pi R$ nên có số đo 2π rad, tương ứng 360° .

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$



Ý chính: Từ $180^\circ = \pi \text{ rad}$, ta suy ra mọi công thức đổi đơn vị.

Ghi nhớ

$$\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ (rad)}, \quad a \text{ rad} = a \cdot \frac{180}{\pi} \text{ (độ)}$$

Độ	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Lưu ý: Khi viết radian, người ta thường **bỏ chữ "rad"**: ví dụ viết $\frac{\pi}{3}$ thay cho $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

Định nghĩa

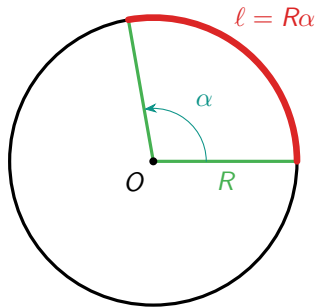
Cung tròn bán kính R có số đo α (rad) thì có **độ dài**:

$$\ell = R|\alpha|$$

Liên hệ thực tế

Kim phút đồng hồ dài 10 cm, quay $\frac{\pi}{2}$ (một góc vuông) thì đầu kim đi được:

$$\ell = 10 \cdot \frac{\pi}{2} \approx 15,7 \text{ cm.}$$



3

Đường tròn lượng giác

Định nghĩa

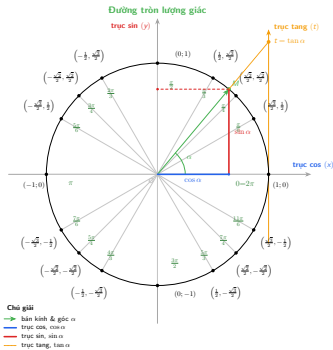
Đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng có **tâm** O , **bán kính** $R = 1$, gắn với hệ trục Oxy ; điểm gốc là $A(1; 0)$.

Ý chính: Mỗi số đo góc α xác định **đúng một điểm** M trên đường tròn — điểm cuối của cung. Tọa độ của M chính là $(\cos \alpha; \sin \alpha)$.

Ghi nhớ

Bốn điểm đặc biệt trên hai trục: $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $A'(-1; 0)$, $B'(0; -1)$ ứng với các cung 0 , $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$.

Đường tròn lượng giác đầy đủ



Số đo tổng quát của cung, góc lượng giác

Ý chính: Quay thêm một vòng đủ (2π hay 360°) thì điểm cuối **không đổi**.

Ghi nhớ

Nếu một cung có số đo α thì **mọi** cung cùng điểm cuối có số đo:

$$\alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{hoặc} \quad a^\circ + k360^\circ.$$

Liên hệ thực tế

Đồng hồ chỉ "3 giờ" hôm nay, ngày mai lại "3 giờ" — kim đã quay thêm nhiều vòng (k vòng) nhưng vị trí thì như cũ. Số k chính là "số vòng quay thêm".

4

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1: Đổi đơn vị góc

Đề bài: a) Đổi 72° sang radian. b) Đổi $\frac{5\pi}{4}$ sang độ.

Bước 1. Nhắc lại công thức chuyển đổi (từ $180^\circ = \pi \text{ rad}$):

$$\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ (rad)}, \quad a \text{ rad} = a \cdot \frac{180}{\pi} \text{ (độ)}.$$

Bước 2. Câu a — nhân số độ với $\frac{\pi}{180}$ rồi rút gọn:

$$72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{72\pi}{180} = \frac{2\pi}{5} \text{ (rad)}.$$

Bước 3. Câu b — nhân số radian với $\frac{180}{\pi}$, chữ π triệt tiêu:

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{5 \cdot 180}{4} = 225^\circ.$$

Kết quả: $72^\circ = \frac{2\pi}{5}$ và $\frac{5\pi}{4} = 225^\circ$.

Ví dụ 2: Số đo tổng quát và vị trí điểm cuối

Đề bài: Cho cung lượng giác có số đo $\frac{25\pi}{4}$. Viết dưới dạng $\alpha + k2\pi$ với $0 \leq \alpha < 2\pi$ và xác định vị trí điểm cuối.

Bước 1. Tách $\frac{25\pi}{4}$ thành phần "số vòng nguyên" và phần dư. Vì $2\pi = \frac{8\pi}{4}$, ta chia:

$$\frac{25\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

Bước 2. Nhận ra $\frac{8\pi}{4} = 2\pi$ nên thu được dạng tổng quát:

$$\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}, k = 3.$$

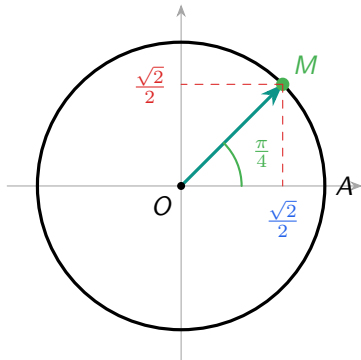
Bước 3. Quay thêm 3 vòng đủ không làm đổi điểm cuối, nên điểm cuối trùng với cung $\frac{\pi}{4}$ — nằm ở giữa góc phần tư thứ nhất.

Kết quả: $\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot 2\pi$; điểm cuối ứng với 45° (góc phần tư I).

Ghi nhớ — mẹo

Để đưa cung lớn về $[0; 2\pi)$: **chia số đo cho 2π** , lấy phần dư. Số vòng nguyên bỏ đi vì *không đổi điểm cuối*.

Lỗi thường gặp: quên rằng quay theo chiều âm thì $k < 0$, ví dụ $-\frac{7\pi}{4}$ vẫn có điểm cuối tại $\frac{\pi}{4}$.



Luyện tập nhanh · Nhận biết

Số đo của một cung tròn có thể được đo bằng đơn vị nào sau đây?

- A. Chỉ độ.
- B. Chỉ radian.
- C. Độ hoặc radian.
- D. Mét vuông.

Đáp án đúng: **C. Độ hoặc radian.**

Cung và góc lượng giác đều đo được bằng cả hai đơn vị. A, B là bẫy vì chỉ nhớ một đơn vị; D nhầm số đo cung với diện tích.

Luyện tập nhanh · Nhận biết

Đổi 180° sang radian ta được kết quả nào?

A. $\frac{\pi}{2}$

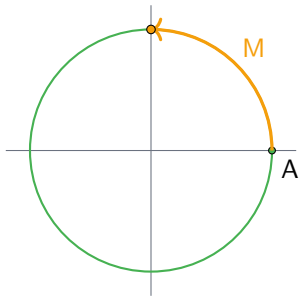
B. π

C. 2π

D. $\frac{\pi}{180}$

Đáp án đúng: **B.** π .

Vì $180^\circ = \pi \text{ rad}$. A nhầm với 90° ; C nhầm với 360° ; D là hệ số đổi $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ chứ không phải 180° .



Luyện tập nhanh · Nhận biết

Điểm M là điểm cuối của cung lượng giác xuất phát từ A . Số đo cung AM (theo chiều dương) bằng:

- A. $\frac{\pi}{2}$
- B. $-\frac{\pi}{2}$
- C. π
- D. $\frac{3\pi}{2}$

Đáp án đúng: **A.** $\frac{\pi}{2}$.

Cung đi ngược chiều kim đồng hồ (chiều dương) một góc vuông $= 90^\circ = \frac{\pi}{2}$. B sai dấu (chiều dương phải dương); C, D nhầm vị trí điểm cuối.

Luyện tập nhanh · Thông hiểu

Đổi $\frac{2\pi}{3}$ rad sang độ ta được:

- A. 60°
- B. 90°
- C. 120°
- D. 150°

Đáp án đúng: **C.** 120° .

$\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$. A là bẫy khi lấy $\frac{\pi}{3}$; B nhầm $\frac{\pi}{2}$; D nhầm $\frac{5\pi}{6}$ do tính sai phân số.

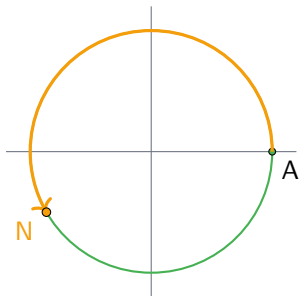
Luyện tập nhanh · Thông hiểu

Cung lượng giác có số đo $\frac{25\pi}{4}$ có điểm cuối trùng với điểm cuối của cung nào sau đây?

- A. $\frac{\pi}{4}$
- B. $\frac{3\pi}{4}$
- C. $-\frac{\pi}{4}$
- D. $\frac{5\pi}{4}$

Đáp án đúng: **A.** $\frac{\pi}{4}$.

$\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot 2\pi$. Bẫy: quên rằng phải trừ bội của 2π (không phải π). D là kết quả sai nếu trừ nhầm bội lẻ của π .



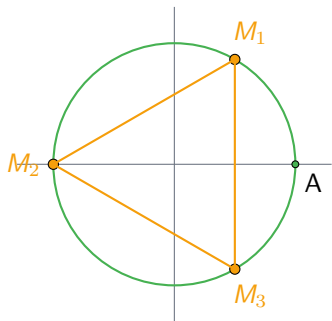
Luyện tập nhanh · Thông hiểu

Điểm cuối N nằm ở góc phần tư thứ III, cung quay 210° theo chiều dương. Số đo cung này theo radian là:

- A. $\frac{7\pi}{6}$
- B. $\frac{5\pi}{6}$
- C. $\frac{7\pi}{4}$
- D. $\frac{4\pi}{3}$

Đáp án đúng: **A.** $\frac{7\pi}{6}$.

$210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$. B là 150° (đọc nhầm hình); C là 315° ; D là 240° — đều do đổi độ sang radian sai.



Luyện tập nhanh · Vận dụng

Ba điểm M_1, M_2, M_3 chia đều đường tròn, biểu diễn cung $\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$. Khoảng cách góc giữa hai điểm liên tiếp là:

- A. $\frac{\pi}{3}$
- B. $\frac{2\pi}{3}$
- C. $\frac{\pi}{2}$
- D. π

Đáp án đúng: **B.** $\frac{2\pi}{3}$.

Họ cung $\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$ cho 3 điểm cách đều nhau $\frac{2\pi}{3}$ (tức 120°). A là bất kỳ khi lấy nhậm số hạng đầu $\frac{\pi}{3}$; C, D không chia đều đường tròn thành 3 phần.

Luyện tập nhanh · Vận dụng

Một bánh xe quay được 3 vòng trong 6 giây. Trong 1 giây, bánh xe quay được một góc bằng bao nhiêu radian?

- A. π
- B. 2π
- C. 3π
- D. $\frac{\pi}{2}$

Đáp án đúng: **A.** π .

3 vòng $= 3 \cdot 2\pi = 6\pi$ rad trong 6 s $\Rightarrow$ mỗi giây $\frac{6\pi}{6} = \pi$. B là bảy quên chia thời gian (lấy $\frac{6\pi}{3}$); C nhầm 3 vòng $= 3\pi$; D chia sai.

1. Đổi các góc sau sang radian: 30° , 45° , 135° , 300° .
2. Đổi các cung sang độ: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$.
3. Tìm điểm cuối và biểu diễn trên đường tròn lượng giác các cung: $\frac{13\pi}{4}$ và $-\frac{7\pi}{3}$.

Gợi ý

Dùng $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ và $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$. Với cung lớn, trừ bội của 2π để đưa về $[0; 2\pi)$ rồi xác định góc phần tư.

1. Đổi sang radian: 15° , 72° , 210° , 315° .
2. Đổi sang độ: $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{2}$.
3. Xác định điểm cuối các cung: $\frac{25\pi}{6}$, $-\frac{17\pi}{4}$.
4. Viết công thức tổng quát của các cung có điểm cuối trùng với điểm cuối cung $\frac{\pi}{3}$.
5. Một cung có số đo α và một cung $\alpha + k2\pi$ khác nhau ở điểm nào? Cho ví dụ.

Đọc trước: bài "Giá trị lượng giác của một cung" — chuẩn bị định nghĩa $\sin$, $\cos$ trên đường tròn lượng giác.

Bảng tóm tắt - Đổi đơn vị

Độ	Radian	Góc phần tư
30°	$\frac{\pi}{6}$	I
45°	$\frac{\pi}{4}$	I
90°	$\frac{\pi}{2}$	I/II
120°	$\frac{2\pi}{3}$	II
180°	π	II/III
270°	$\frac{3\pi}{2}$	III/IV

Nội dung	Công thức
Đổi độ sang radian	$\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\text{độ}} \cdot \frac{\pi}{180}$
Đổi radian sang độ	$\alpha_{\text{độ}} = \alpha_{\text{rad}} \cdot \frac{180}{\pi}$
Cung có cùng điểm cuối	$\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
Độ dài cung	$\ell = R \cdot \alpha $ (α radian)
Chiều dương	Ngược chiều kim đồng hồ

- ▶ Cung và góc lượng giác được đo bằng **độ** hoặc **radian**; nắm vững hai công thức đổi qua lại $1^\circ = \frac{\pi}{180}$, $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$.
- ▶ **Chiều dương** là ngược chiều kim đồng hồ; số đo dương/âm phản ánh chiều quay.
- ▶ Các cung sai khác nhau một **bội của** 2π có cùng điểm cuối: $\alpha + k2\pi$ — nhớ trừ bội 2π chứ không phải π .
- ▶ Lỗi hay gặp: sai dấu chiều quay, đổi đơn vị nhầm, quên điều kiện bội 2π .

Liên hệ: chuyển động quay của bánh xe, kim đồng hồ hay Trái Đất đều được mô tả bằng góc lượng giác — nền tảng cho hàm số lượng giác sắp học.

Cảm ơn các em đã lắng nghe!

Bài giảng biên soạn với EduFlow · agentra.io.vn
