

Hàm số bậc hai

Toán · Lớp 10

Giáo viên: Phúc Hảo

- ▶ Nhận biết **hàm số bậc hai** $y = ax^2 + bx + c$ và dạng đồ thị **parabol**.
- ▶ Xác định **đỉnh**, **trục đối xứng** và bề lõm của parabol.
- ▶ Vẽ đồ thị hàm số bậc hai qua các bước chuẩn.
- ▶ Vận dụng đồ thị vào bài toán thực tế.

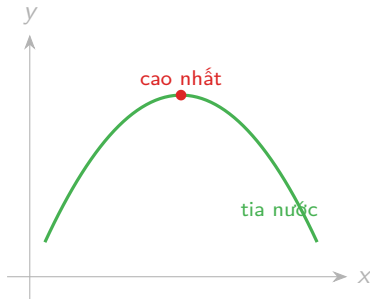
Ý chính: Đồ thị của hàm số bậc hai luôn là một đường cong hình chữ U gọi là **parabol**.

Khi ta ném một quả bóng lên cao, quả bóng bay theo một đường cong rồi rơi xuống đất.

Vòi nước phun lên, tia nước cũng **cong xuống** theo một hình dạng quen thuộc.

Câu hỏi gợi mở

Đường cong đó gọi là gì? Vì sao nó luôn **đối xứng** và có một **điểm cao nhất**?



1

Khái niệm hàm số bậc hai

Định nghĩa hàm số bậc hai

Định nghĩa

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức

$$y = ax^2 + bx + c,$$

trong đó a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

- ▶ a gọi là **hệ số bậc hai** (bắt buộc khác 0).
- ▶ b là hệ số bậc nhất, c là hệ số tự do.

Lưu ý

Nếu $a = 0$ thì hàm chỉ còn $y = bx + c$ — đó là hàm bậc nhất, **không** phải bậc hai. Điều kiện $a \neq 0$ là **cốt lõi**.

Ví dụ nhận dạng

Trong các hàm sau, hàm nào là hàm số bậc hai?

▶ $y = 2x^2 - 3x + 1 \Rightarrow$ **Đúng**, $a = 2 \neq 0$.

▶ $y = -x^2 + 5 \Rightarrow$ **Đúng**, $a = -1$, $b = 0$.

▶ $y = 3x + 7 \Rightarrow$ **Không**, thiếu x^2 .

▶ $y = \frac{1}{x^2} + 1 \Rightarrow$ **Không**, x^2 ở mẫu.

Ý chính: Chỉ cần kiểm tra: có số hạng ax^2 với $a \neq 0$ và không có x ở mẫu, dưới căn.

2

Đồ thị parabol

Đồ thị là đường parabol

Đồ thị hàm số bậc hai

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đường cong gọi là **parabol**.

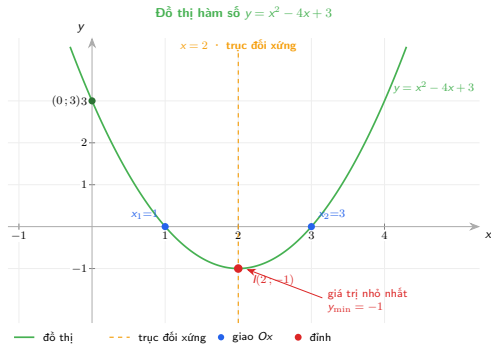
Parabol có ba đặc điểm cần nhớ:

- ▶ Một điểm đặc biệt gọi là **đỉnh** I .
- ▶ Một đường thẳng đứng gọi là **trục đối xứng** đi qua đỉnh.
- ▶ **Bề lõm** quay lên nếu $a > 0$, quay xuống nếu $a < 0$.

Liên hệ thực tế

Hình parabol xuất hiện ở cầu treo, ăng-ten chảo, tia nước phun — nơi cần độ đối xứng và hội tụ.

Đồ thị $y = x^2 - 4x + 3$



Công thức cốt lõi

Với $y = ax^2 + bx + c$, đỉnh của parabol là

$$I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right), \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Trục đối xứng là đường thẳng đứng $x = -\frac{b}{2a}$.

- ▶ Tung độ đỉnh cũng bằng $y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
- ▶ Trục đối xứng luôn **đi qua đỉnh** và song song trục Oy .

Mẹo nhớ

Nhớ hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{b}{2a}$; thay vào hàm để lấy tung độ — khỏi cần nhớ $-\frac{\Delta}{4a}$.

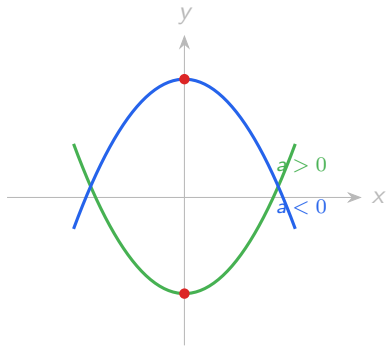
Bề lõm và hình dạng parabol

Dấu của a quyết định hướng bề lõm:

- ▶ $a > 0$: bề lõm **hướng lên**, đỉnh là điểm **thấp nhất** $\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất.
- ▶ $a < 0$: bề lõm **hướng xuống**, đỉnh là điểm **cao nhất** $\Rightarrow$ giá trị lớn nhất.

Ghi nhớ

$a > 0$: hình chữ U (cười). $a < 0$: hình úp ngược (buồn).



Ý chính: Vẽ parabol theo 4 bước cố định — luôn làm đúng thứ tự này.

1. Xác định **tọa độ đỉnh** $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
2. Vẽ **trục đối xứng** $x = -\frac{b}{2a}$.
3. Xác định **giao điểm** với Oy tại $(0; c)$ và với Ox (giải $y = 0$).
4. Lấy thêm vài điểm, vẽ đường cong **đối xứng**, bề lõm theo dấu a .

Lỗi thường gặp

Vẽ parabol **không đối xứng** qua trục, hoặc quên xác định đỉnh trước. Luôn bắt đầu từ đỉnh!

3

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1 — Xác định đỉnh và trục đối xứng

Đề: Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$. Tìm tọa độ đỉnh và trục đối xứng.

Bước 1. Xác định hệ số. Ta có $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$ (vì $a \neq 0$ nên là hàm bậc hai).

Bước 2. Tính hoành độ đỉnh (dùng công thức $x_I = -\frac{b}{2a}$):

$$x_I = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2.$$

Bước 3. Thay $x_I = 2$ vào hàm để tìm tung độ đỉnh:

$$y_I = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1.$$

Kết luận: Đỉnh $I(2; -1)$, trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$.

Ví dụ 2 — Vẽ đồ thị (phần tính toán)

Đề: Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

Bước 1. Hệ số: $a = -1 < 0$ nên bề lõm **hướng xuống**, đỉnh là điểm cao nhất.

Bước 2. Tọa độ đỉnh:

$$x_I = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1, \quad y_I = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4.$$

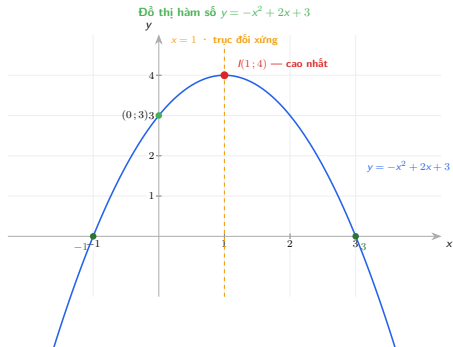
Vậy đỉnh $I(1; 4)$, trục đối xứng $x = 1$.

Bước 3. Giao điểm với các trục:

$$x = 0 \Rightarrow y = 3; \quad y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3.$$

Kết luận: Parabol qua $(-1; 0)$, $(3; 0)$, $(0; 3)$, đỉnh $I(1; 4)$, bề lõm xuống.

Ví dụ 2 — Đồ thị $y = -x^2 + 2x + 3$



Ý chính: Năm đỉnh, trục đối xứng và dấu a là đủ để hình dung mọi parabol.

Yếu tố	Công thức / ý nghĩa
Hàm số bậc hai	$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
Hoành độ đỉnh	$x_I = -\frac{b}{2a}$
Trục đối xứng	$x = -\frac{b}{2a}$
Bề lõm lên	$a > 0$ (đỉnh thấp nhất)
Bề lõm xuống	$a < 0$ (đỉnh cao nhất)

Ghi nhớ

Luôn tìm **đỉnh trước**, rồi mới vẽ đường cong đối xứng qua trục $x = -\frac{b}{2a}$.

Luyện tập nhanh · Nhận biết

Đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là đường gì?

- A. Đường thẳng
- B. Parabol
- C. Đường tròn
- D. Đường hypebol

Đáp án đúng: **B. Parabol.**

Đồ thị hàm bậc hai luôn là một parabol. Phương án A là đồ thị hàm bậc nhất (bấy do nhầm bậc); C, D là các đường khác không liên quan đến hàm bậc hai.

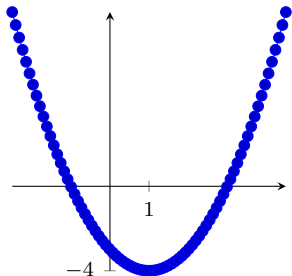
Luyện tập nhanh · Nhận biết

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có bề lõm quay lên trên khi nào?

- A. $a > 0$
- B. $a < 0$
- C. $a = 0$
- D. $c > 0$

Đáp án đúng: **A.** $a > 0$.

Dấu của a quyết định bề lõm: $a > 0$ lõm lên, $a < 0$ lõm xuống. Chọn D sai vì c chỉ là tung độ giao với trục Oy , không quyết định bề lõm.



Luyện tập nhanh · Nhận biết

Đỉnh của parabol trong hình có tọa độ là?

- A. $(1; -4)$
- B. $(-1; -4)$
- C. $(1; 4)$
- D. $(-4; 1)$

Đáp án đúng: **A.** $(1; -4)$.

Đọc điểm thấp nhất của đồ thị: hoành độ $= 1$, tung độ $= -4$. Chọn B nhầm dấu hoành độ; C nhầm dấu tung độ; D đảo thứ tự hoành độ và tung độ.

Luyện tập nhanh · Thông hiểu

Tọa độ đỉnh của parabol $y = x^2 - 4x + 1$ là?

- A. $(2; -3)$
- B. $(-2; -3)$
- C. $(2; 13)$
- D. $(4; 1)$

Đáp án đúng: **A.** $(2; -3)$.

$x_I = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$, $y_I = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3$. Chọn B quên đổi dấu $-\frac{b}{2a}$; C thay nhầm dấu khi tính y_I ; D lấy nhầm b và c làm tọa độ.

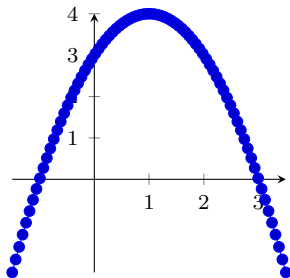
Luyện tập nhanh · Thông hiểu

Trục đối xứng của parabol $y = 2x^2 + 8x - 1$ là đường thẳng?

- A. $x = 2$
- B. $x = -2$
- C. $x = 4$
- D. $x = -1$

Đáp án đúng: **B.** $x = -2$.

Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{4} = -2$. Chọn A quên dấu trừ; C nhầm lấy b/a ; D nhầm dùng hệ số c .



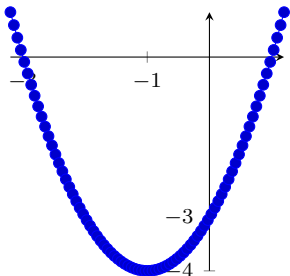
Luyện tập nhanh · Thông hiểu

Từ đồ thị, hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 1)$
- B. $(1; +\infty)$
- C. $(-\infty; 4)$
- D. $(0; +\infty)$

Đáp án đúng: **A.** $(-\infty; 1)$.

Parabol lõm xuống, đồng biến bên trái đỉnh $x = 1$. Chọn B là khoảng nghịch biến (nhầm ngược với $a > 0$); C, D nhầm lấy tung độ đỉnh hoặc giao trục làm mốc.



Luyện tập nhanh · Vận dụng

Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm. Tổng hai nghiệm của phương trình tương ứng bằng?

- A. -2
- B. 2
- C. -4
- D. -3

Đáp án đúng: **A.** -2 .

Hàm $y = (x + 1)^2 - 4$ cắt Ox tại $x = -3$ và $x = 1$, tổng $= -2$ (bằng $2x_l = 2 \cdot (-1)$).
Chọn C là tích, B nhầm dấu, D nhầm lấy một nghiệm âm.

Luyện tập nhanh · Vận dụng

Một quả bóng ném lên có độ cao $h = -5t^2 + 20t$ (m, t tính bằng giây). Độ cao lớn nhất quả bóng đạt được là?

- A. 20 m
- B. 40 m
- C. 10 m
- D. 4 m

Đáp án đúng: **A. 20 m.**

$a = -5 < 0$ nên có giá trị lớn nhất tại $t = -\frac{b}{2a} = 2$; $h_{\max} = -5 \cdot 4 + 40 = 20$. Chọn D là thời điểm đạt đỉnh chứ không phải độ cao; C, B do tính sai $h_{\max}$.

1. Xác định tọa độ đỉnh, trục đối xứng của $y = x^2 - 6x + 5$ và vẽ bảng biến thiên.
2. Vẽ đồ thị $y = -x^2 + 2x + 3$: tìm đỉnh, giao trục, một điểm đối xứng.
3. Từ đồ thị đã vẽ, đọc khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị lớn nhất/nhỏ nhất.

Gợi ý

Đỉnh: $x_I = -\frac{b}{2a}$, $y_I = f(x_I)$. Xác định dấu a để biết bề lõm, rồi lấy thêm hai điểm đối xứng qua trục $x = x_I$ để vẽ chính xác.

1. Tìm đỉnh và trục đối xứng của: a) $y = 2x^2 - 8x + 1$; b) $y = -3x^2 + 6x$.
2. Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ và tìm giao điểm với hai trục tọa độ.
3. Lập bảng biến thiên của $y = -x^2 + 4x - 1$ và nêu giá trị lớn nhất.
4. Tìm m để parabol $y = x^2 + mx + 2$ có đỉnh nằm trên trục tung.
5. Một vòi phun nước tạo dòng nước dạng parabol $y = -x^2 + 4x$. Tìm độ cao lớn nhất của dòng nước.

Đọc trước

Bài "Dấu của tam thức bậc hai" — mối liên hệ giữa đồ thị parabol và dấu của $f(x)$.

Bảng tóm tắt: Đặc điểm parabol $y = ax^2 + bx + c$

Đặc điểm	$a > 0$	$a < 0$
Bề lõm	Quay lên	Quay xuống
Đỉnh /	Điểm thấp nhất	Điểm cao nhất
Trục đối xứng	$x = -\frac{b}{2a}$	
Tọa độ đỉnh	$\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$	
Giá trị đặc biệt	Nhỏ nhất $= y_l$	Lớn nhất $= y_l$

Bảng tóm tắt: Chiều biến thiên

Khoảng	$a > 0$	$a < 0$
$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$	Nghịch biến	Đồng biến
$\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$	Đồng biến	Nghịch biến

Ghi nhớ: đỉnh là "bản lề" đổi chiều biến thiên của hàm số.

- ▶ Đồ thị hàm số bậc hai luôn là **parabol**; dấu của a quyết định bề lõm quay lên ($a > 0$) hay xuống ($a < 0$).
- ▶ **Đỉnh** $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ và trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$ là yếu tố then chốt để vẽ và đọc đồ thị.
- ▶ Từ đỉnh xác định được **chiều biến thiên** và giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của hàm số.
- ▶ Vẽ chính xác cần lấy thêm giao điểm với các trục và các điểm đối xứng qua trục.

Liên hệ: quỹ đạo bóng ném, dòng nước phun, cầu treo... đều mang hình dáng parabol.

Cảm ơn các em đã lắng nghe!

Bài giảng biên soạn với EduFlow · agentra.io.vn
